Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιανουάριος 2019

Ανάλυση Ι

1.
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι $\sup(A+A) = \sup A$, όπου $A + A = \{a + b : a, b \in A\}$. Υπολογίστε τα $\sup, \inf, \limsup, \liminf$ της ακολουθίας (a_n) με $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{2n}$ αν n άρτιο και $a_n = \frac{en}{[en]}$ αν n περιττό.

2.
Έστω (x_n) ακολουθία θετικών αριθμών ώστε $\lim x_n = 0$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + \frac{1}{n})^n$ συγκλίνει ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ δεν συγκλίνει κατ' ανάγκη. Τέλος, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k}$ να συγκλίνει.

3.
Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n} - 1)^{n!}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 + n2^n}{2^n + 3^n}, \sum_{n=1}^{\infty}(1 + (-1)^n)\frac{1}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}$$

4.
Δείξτε ότι η συνάτρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο 1 κάνοντας χρήση του ορισμού της συνέχειας. Δίνονται πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ με $a_0 a_n < 0$ και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $p(g(x)) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η g είναι σταθερή συνάρτηση.

5.
Δίνονται $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(a, +\infty)$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ισχύει το αντίστροφο; Έστω $h, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} h \circ g(x) = l$.

6.
Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) - 2x > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ συγκλίνει. Δώστε παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης.