Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2020

Ανάλυση II

1.
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \int_0^x [t]dt, \ x \in \mathbb{R}$$

(i) Εξετάστε εάν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$.

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ και εξετάστε εάν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

2.
(i) Εξετάστε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^a) & , x \in (0,1] \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(ii) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_0^1 (f(x))^2 dx = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ισχύει το ίδιο αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη;

3.
(i) Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \to \frac{\sin x}{x}$ ομοιόμορφα στο $(0,1]$;

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \to e^x$ ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο διάστημα $[a,b]$.

(iii) Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \to e^x$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;

4.
Έστω $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}, \ x > 0$$

(i) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$;

(ii) Είναι η f φραγμένη στο $(0,+\infty)$;

(iii) Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1]$; Στο $[1,+\infty)$;

5.
(i) Εξετάστε εάν το σύνολο

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in \mathbb{Q}\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ (με την συνηθισμένη μετρική).

(ii) Δείξτε ότι εάν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα A_n είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (με την συνηθισμένη μετρική) και $A_n \subseteq [n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε και το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι κλειστό σύνολο.