Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2020

Ανάλυση ΙΙ

1.
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \int_0^x [t]dt,\ \ x \in \mathbb{R}$$

(i) Εξετάστε εάν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ και εξετάστε εάν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

2.
(i) Εξετάστε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^a) & , x \in (0, 1] \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(ii) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_0^1 (f(x))^2 dx = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Ισχύει το ίδιο αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη;

3.
(i) Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \to \frac{\sin x}{x}$ ομοιόμορφα στο $(0, 1]$;

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \to e^x$ ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$.

(iii) Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \to e^x$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;

4.
Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x},\ \ x > 0$$

(i) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$;

(ii) Είναι η f φραγμένη στο $(0, +\infty)$;

(iii) Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1]$; Στο $[1, +\infty)$;

5.
(i) Εξετάστε εάν το σύνολο

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in \mathbb{Q}\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ (με την συνηθισμένη μετρική).

(ii) Δείξτε ότι εάν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα A_n είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (με την συνηθισμένη μετρική) και $A_n \subseteq [n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε και το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι κλειστό σύνολο.

Λύσεις

1.
(i) Θεωρούμε συμπαγές διάστημα $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ και $x, y \in [a,b]$. Τότε

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| \int_x^y [t]dt \right| \leq \left| \int_x^y |[t]|dt \right| \ (1).$$

Η συνάρτηση $[t]$ είναι φραγμένη στο $[a,b]$. Έστω λοιπόν $M > 0$ ώστε $|[t]| \leq M$, $t \in [a,b]$. Τότε από την (1) παίρνουμε $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$. Δηλαδή η f είναι Lipschitz συναχής στο $[a,b]$, άρα και ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$, άρα και συνεχής στο $[a,b]$. Το διάστημα $[a,b]$ είναι τυχαίο, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επίσης, προφανώς η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (0,1) αφού είναι στο [0,1].

(ii) Έστω $x \geq 0$. Υπλογίζουμε
$f(x) = \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} [t]dt + \int_{[x]}^x [t]dt = \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} kdt + \int_{[x]}^x [x]dt = \sum_{k=0}^{[x]-1} k + [x](x-[x]) = \frac{[x]([x]-1)}{2} + [x](x-[x]) = [x]\frac{[x]-1+2x-2[x]}{2} = [x]\frac{2x-[x]-1}{2}$. Άρα για κάθε $x \geq 3$,
$\frac{f(x)}{x} = [x](1 - \frac{[x]+1}{2x}) \geq [x](1 - \frac{x+1}{2x}) \geq [x](1 - \frac{2}{3}) = \frac{[x]}{3} \to +\infty$ καθώς $x \to +\infty$. Δείχνουμε ότι από αυτό το όριο συνεπάγεται ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$. Αν η f ήταν ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$ θα υπήρχαν σταθερές $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq Ax + B$, $x \geq 0$. Τότε θα είχαμε $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq A + \frac{B}{x}$, $x \geq 0$ το οποίο αντιφάσκει στο παραπάνω όριο.

2.
(i) Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη στο $[c,1]$ για κάθε $0 < c < 1$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο [0,1].

Προφανώς η f είναι φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη στο $[c,1]$ για κάθε $0 < c < 1$ αφού η f είναι συνεχής στο (0,1]. Επομένως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη για κάθε τιμή του $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Υποθέτουμε ότι $f(x_0) \neq 0$ για κάποιο $x_0 \in [0,1]$. Αφού η f είναι συνεχής, υπάρχει διάστημα $[a,b] \subseteq [0,1]$, $a < b$, ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε $f(x)^2 > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Μάλιστα, αφού η f^2 συνεχής στο $[a,b]$, έχει ελάχιστη τιμή. Θέτουμε $c = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)^2 > 0$. Τότε

$\int_0^1 f(x)^2 dx \geq \int_a^b f(x)^2 dx \geq \int_a^b c dx = c(b-a) > 0$ το οποίο αντιφάσκει στην υπόθεση.

3.
(i) Η απάντηση είναι θετική. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο [0,1] αφού $\lim\limits_{x \to} \frac{\sin x}{x} = 1$. Από το Θεώρημα Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο [0,1]. Άρα $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο (0,1].

(ii) Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f(x) = e^x$. Από το Θεώρημα Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p_1 ώστε $|p_1(x) - f(x)| < 1$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Όμοια, υπάρχει πολυώνυμο p_2 ώστε $|p_2(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in [-2,2]$. Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $|p_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in [-n,n]$. Δείχνουμε το ζητούμενο για αυτήν την ακολουθία. Έστω διάστημα $[a,b]$. Υπάρχει n_0 ώστε $[a,b] \subseteq [-n,n]$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $|p_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε $n \geq n_0$.

(iii) Η απάντηση είναι αρνητική. Θα δείξουμε ότι για κάθε πολυώνυμο p, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-p(x)| = +\infty$. Πράγματι, αν $p(x) = a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$ και αν υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $a_k > 0$ τότε θα έχουμε $f(x) - p(x) = a_k x^k \left(\frac{e^x}{a_k x^k} - 1 - \frac{a_{k-1}}{a_k x} - \frac{a_{k-2}}{a_k x^2} - ... - \frac{a_1}{a_k x^{k-1}} - \frac{a_0}{a_k x^k} \right)$. Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{a_k x^k} = +\infty$ (εφαρμόζωντας πολλές φορές κανόνα de l'Hospital). Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-p(x)) = +\infty$, απ' όπου έπεται $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-p(x)| = +\infty$.

4.

(i) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x}$, $x > 0$. Η f είναι καλά ορισμένη αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει κατά σημείο στο $(0,+\infty)$. Έστω τυχαίο διάστημα $[a,+\infty] \subseteq (0,+\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,+\infty]$. Τότε η f θα είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Έχουμε $f_n'(x) = -\frac{n^2}{(1+n^2x)^2}$ και $|f_n'(x)| \leq \frac{n^2}{(1+n^2a)^2} = M_n$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weirstrass η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty]$ σε παραγωγίσιμη συνάρτηση (εδώ η f) και $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2x)^2}$.

(ii) Έστω $M > 0$. Λύνουμε την ανισότητα: $f_n(x) > \frac{M}{n^2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x < \frac{n^2-M}{n^2M}$. Επιλέγουμε $n_0 = [\sqrt{2M}] + 1$ ώστε $\frac{n^2-M}{n^2M} > \frac{1}{2M}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επιλέγουμε λοιπόν $\delta_1 = \frac{1}{2M}$. Αν $0 < x < \delta_1$ τότε $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x) > M \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Επιπλέον $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 1$ για κάθε n. Άρα υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε $f_n(x) > \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (0,\delta_2)$ και κάθε $n = 1,2,...,n_0-1$. Επομένως αν $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ και αν $0 < x < \delta$ τότε $f(x) > \frac{n_0-1}{2} + M\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{[\sqrt{2M}]}{2} + M\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Επομένως η f δεν είναι φραγμένη στο $(0,+\infty)$.

(iii) Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1]$ όπως προκύπτει από το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Για την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο $[1,+\infty)$, το αποδείξαμε στο (i).

5.

(i) Θα αποδείξουμε ότι το A δεν είναι κλειστό, δηλαδή ότι υπάρχει ακολουθία στοιχείων του A που συγκλίνει σε στοιχείο εκτός του A. Θεωρούμε λοιπόν την ακολουθία (x_n) του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $x_n \to \pi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Τότε $(x_n,x_n) \in \mathbb{Q}$ και $(x_n,x_n) \to (\pi,\pi) \notin A$ διότι $2\pi \notin \mathbb{Q}$.

(ii) Έστω (x_n) ακολουθία στο A και $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών (k_n) τέτοια ώστε $x_n \in A_{k_n}$. Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχει γνήσια αύξουσα υπακολουθία (k_{n_m}) της (k_n). Πράγματι, αν υπήρχε, θα είχαμε $k_{n_m} \to \infty$ καθώς $m \to \infty$, $x_{n_m} \in A_{k_{n_m}} \subseteq [k_{n_m},+\infty)$, άρα $x_{n_m} \geq k_{n_m}$, άρα $x_{n_m} \to +\infty$. Αυτό αντιφάσκει στην υπόθεσή μας $x_n \to x$. Επομένως η ακολουθία (k_n) έχει πεπερασμένο πλήθος τιμών. Υπάρχει λοιπόν $N \in \mathbb{N}$ ώστε η (x_n) να περιέχεται στο $A_1 \cup ... \cup A_N$. Το $A_1 \cup ... \cup A_N$ είναι κλειστό ως πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων, άρα $x \in A_1 \cup ... \cup A_N \subseteq A$.