Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2016

Ανάλυση II

1.
Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1},\ g(x) = \frac{1 + x^3}{1 + x},\ x \in (0, +\infty).$$

Εξετάστε εάν οι f, g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $(0, +\infty)$.

2.
(α) Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -x & , x \in (0, 1) \\ 2 & , x \in \{0, 1\} \\ x & , x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το

$$\int_0^2 f(x)dx.$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0, 1] \\ -1 & , 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

και η $h : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \int_0^x g(t)dt,\ x \in [0, 2].$$

Αποδείξτε ότι
(i) Η h είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 2]$.
(ii) Η h δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.

3.
Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = e^{-n^2 x}, x \in [0, +\infty), n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0, +\infty)$ και βρείτε την f.
(β) Εξετάστε αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[1, +\infty)$.
(γ) Εξετάστε αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$.

4.
Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x^{n+1} - x^{2n} + x^{3n}) g(x) dx = 0.$$

5.
Δίνεται η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k(1-x^k)}{2k}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στο $[0,1]$.
(β) Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

6.
Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε

$$\int_0^1 f(x) x^{(k+1)/2} dx,\ \ k = 0, 2, 4, \ldots.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.