

## Τοπολογία

1.

Έστω  $(X, \tau), (Y, \rho)$  δύο τοπολογικοί χώροι,  $A \subseteq X$  κλειστό και  $B \subseteq Y$  κλειστό. Να αποδείξετε ότι το  $A \times B$  είναι κλειστό στον χώρο  $X \times Y$  με την τοπολογία γινόμενο.

2.

Θεωρούμε τον χώρο  $\mathbb{R}$  με την συνήθη τοπολογία της οποίας βάση είναι τα ανοικτά διαστήματα και συνεχείς συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

i) Να αποδείξετε ότι το σύνολο  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x)\}$  είναι κλειστό.

ii) Έστω  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η συνάρτηση  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ . Να αποδείξετε ότι η  $h$  είναι συνεχής.

3.

Με χρήση του Λήμματος Zorn, να αποδείξετε ότι κάθε φίλτρο  $\mathcal{H}$  επί ενός συνόλου  $X$  περιέχεται σε κάποιο υπερφίλτρο  $\mathcal{F}$  του  $X$ .

4.

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα συμπάγειας του Tychonoff.

5.

Να αποδείξετε ότι αν  $(X, \tau), (Y, \rho)$  τοπολογικοί χώροι με τον  $X$  συμπαγή και  $f : X \rightarrow Y$  μία συνεχής και επί συνάρτηση τότε ο  $Y$  είναι συμπαγής.