Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Φεβρουάριος 2020

Στοχαστικές Ανελίξεις

1.
Θεωρούμε έναν πληθυσμό που αναπτύσσεται με γενιές και συμβολίζουμε με X_n το μέγεθος της n-οστής γενιάς του πληθυσμού. Αρχικά, οπληθυσμός (γενιά 0) έχει ένα άτομο (δηλαδή $X_0 = 1$). Κάθε άτομο της γενιάς n γεννά k (άμεσους) απογόνους με πιθανότητα a_k, για $k = 0, 1, 2, ...$, ανεξάρτητα από το πλήθος των απογόνων των άλλων ατόμων του πληθυσμού. Συμβολίζουμε με μ και σ^2 την μέση τιμή και την διασπορά του πλήθους των (άμεσων) απογόνων ενός ατόμου. Το σύνολο των (άμεσων) απογόνων των ατόμων της γενιάς n αποτελούν την γενιά $n + 1$.

(1) Να δικαιολογήσετετ ότι η $\{X_n : n \geq 0\}$ είναι μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου και να υπολογίσετε την πιθανότητα $Pr[X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3]$ συναρτήσει των πιθανοτήτων a_k για $k = 0, 1, 2....$

(2) Να βρείτε μια αναδρομική σχέση που να συνδέει τις $E[X_{n+1}]$ και $E[X_n]$. Ομοίως να βρείτε μια αναδρομική σχέση που να συνδέει τις $Var[X_{n+1}]$ και $Var[X_n]$.

(3) Να βρείτε κλειστούς τύπους για τα $E[X_n]$ και $Var[X_n]$.

2.
Θεωρούμε μία μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, ...\}$. Οι μη μηδενικές πιθανότητες μετάβασης δίνονται ως εξής

$$\begin{array}{llll} p_{0,0} = 1/2, & p_{0,1} = 1/2, & p_{1,0} = 1/3, & p_{1,1} = 2/3, \\ p_{2,1} = 1/3, & p_{2,3} = 2/3, & p_{3,2} = 1/3, & p_{3,4} = 2/3, \\ . & & & \end{array}$$

και $p_{n,n+1} = 1,$ για κάθε $n \geq 4$.

(1) Να βρεθούν οι κλάσεις επικοινωνίας και να βρεθεί ο τύπος κάθε κατάστασης ως προς την επαναληπτικότητα (θετικά ή μηδενικά επαναληπτικές ή παροδικές). Διατυπώστε σαφώς όποια πρόταση χρησιμοποιήσετε για την κατάτακη των καταστάσεων.

(2) Να βρεθεί η πιθανότητα η μαρκοβιανή αλυσίδα να περάσει κάποτε από την κατάσταση 5 δεδομένου ότι η αρχική της κατάσταση ήταν η 2.

(3) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n\to\infty} p_{0,0}^{(n)}$ και να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος επανόδου στην κατάσταση 0 ξεκινώντας από αυτήν.

3.
Κάθε μέρα μία μηχανή μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις εξής καταστάσεις: 1 (τέλεια), 2 (καλή) και 3 (βλάβη). Αν η μηχανή είναι σε τέλεια κατάσταση μία μέρα τότε την επόμενη μέρα θα είναι στην ίδια κατάσταση με πιθανότητα 1/2 ή σε καλή κατάσταση με πιθανότητα 1/2. Αν η μηχανή είναι σε καλή κατάσταση μία μέρα τότε την επόμενη μέρα θα είναι στην ίδια κατάσταση με πιθανότητα 3/4 ή σε κατάσταση βλάβης με πιθανότητα 1/4. Αν η μηχανή είναι σε κατάσταση βλάβης μία μέρα τότε την επόμενη μέρα θα έχει επισκευαστεί πλήρως και θα είναι σε τέλεια κατάσταση.

(1) Να βρεθεί ο μέσος αριθμός ημερών μέχρι την πρώτη μέρα που η μηχανή θα βρεθεί σε κατάσταση βλάβης δεδομένου ότι αρχικά η μηχανή είναι σε τέλεια κατάσταση.

(2) Αν το ημερήσιο κόστος της μηχανής είναι 1,2 ή 5 χρηματικές μονάδες ανάλογα με την κατάσταση τέλεια, καλή ή βλάβη της μηχανής, αντίστοιχα, και υπάρχει και πλέον κόστος 3 χρηματικών μονάδων όποτε η μηχανή μεταβαίνει από την βλάβη στην τέλεια κατάσταση, να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά ημέρα.

(3) Να βρεθεί ο μέσος αριθμός των ημερών που η μηχανή είναι σε τέλεια κατάσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ημερών βλάβης της μηχανής.

4.

Σε ένα πάρτυ υπάρχουν συνολικά N άτομα που κυκλοφορούν σε δύο χώρους: στο σαλόνι και στην τραπεζαρία. Κάθε άτομο ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα περιφέρεται στους δύο χώρους, μένοντας στο σαλόνι για εκθετικό χρόνο παραμονής με παράμετρο ν και μετά στην τραπεζαρία για εκθετικό χρόνο παραμονής με παράμετρο μ και μετά πάλι στο σαλόνι κ.ο.κ.. · Έστω $X(t)$ το πλήθος των ατόμων στο σαλόνι τη στιγμή t.

(1) Να δικαιολογηθεί ότι η $\{X(t)\}$ είναι μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να γίνει το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της.

(2) Να υπολογισθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που υπάρχουν n άτομα στο σαλόνι.

(3) Να υπολογισθεί ο μέσος χρόνος από την στιγμή που εμφανίζεται το πρώτο άτομο στο κενό σαλόνι μέχρι την επόμενη στιγμή που το σαλόνι θα ξαναείναι κενό.