

Μαθηματική Στατιστική

1.

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x; \lambda) = (\lambda + 3)x^{\lambda+2} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

όπου $\lambda \in \Lambda = (-3, +\infty)$ άγνωστη παράμετρος.

(α) Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το λ .

(β) Να βρεθεί η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελαχίστης διασποράς για την παραμετρική συνάρτηση $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda+3}$.

(γ) Να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για το λ ίσων ουρών με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - a$, όπου $a \in (0, 1)$.

(δ) Να βρεθεί σε επίπεδο σημαντικότητας a , όπου $a \in (0, 1)$, η κρίσιμη περιοχή ισχυρότατου ελέγχου για την υπόθεση

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \text{ vs. } H_1 : \lambda = \lambda_1$$

όπου $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$ με $\lambda_0 > \lambda_1$ είναι γνωστά.

(Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $-\ln X_i$)

2.

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x; \theta) = 5e^{5(\theta-x)} \mathbb{1}_{[\theta, +\infty)}(x)$$

όπου $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$ άγνωστη παράμετρος. Να βρεθούν:

(α) Μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το θ .

(β) Η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας του θ .

(γ) Η εκτιμήτρια ροπών του θ .