

Θεμέλια Μαθηματικών

1.

Έστω $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο τύπων της προτασιακής λογικής ώστε δεν υπάρχει απονομή τιμών αληθείας που να επαληθεύει όλα τα στοιχεία του. Αν ϕ τυχόν τύπος, να αποδείξετε ότι ο τύπος

$$(\sigma_n \rightarrow (\sigma_{n-1} \rightarrow (\dots \rightarrow (\sigma_1 \rightarrow \phi) \dots)))$$

είναι ταυτολογία.

2.

Αν $f : X \rightarrow Y$ είναι συνάρτηση και $A \subseteq Y$, τότε με $f^{-1}[A]$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{x \in X : f(x) \in A\}$. Αν $A_1, A_2 \subseteq Y$, αληθεύει ότι $f^{-1}[A_1 \cap A_2] = f^{-1}[A_1] \cap f^{-1}[A_2]$; Να αποδείξετε την (θετική ή αρνητική) απάντησή σας.

3.

Έστω R μία μεταβατική διμελής σχέση σε ένα σύνολο A . Είναι η σχέση

$$S = \{(x, y) \in A^2 : (x, y) \in R \text{ και } (y, x) \in R\}$$

ανακλαστική (ή, αλλιώς, αυτοπαθής); Να αποδείξετε την (θετική ή αρνητική) απάντησή σας.

Υπενθύμιση: Ανακλαστική (ή αυτοπαθής) καλείται μία διμελής σχέση S αν ισχύει ότι: $\forall a \in A ((a, a) \in S)$.