Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Φεβρουάριος 2020

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

1.

α.) Θεωρήστε την συνάρτηση $\phi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^4$ ορισμένη για $(x,y) \neq (0,0)$. Υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\phi(x,y)$; Υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1-\cos x)^{3/4}\phi(x,y)$;

β.) Έστω $\alpha > 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Θεωρήστε την επιφάνεια $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = \alpha^2, 2z \geq \alpha\}$ και υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_E z^\lambda d\sigma$.

2.

α.) Υπολογίστε το διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y^{1/2}}^{y^{1/5}} \sqrt{1-x^3}dx\right)dy.$$

β.) Για ποιές τιμές του λ είναι η συνάρτηση $\phi_\lambda(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^6+y^6)^\lambda}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ συνεχής και για ποιές είναι διαφορίσιμη;

3.

α.) Αν $P(x,y,z)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού (ως προς x, y και z) και το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(3,2,1)} \frac{(y^2-xz)^{yz} - P(x,y,z)}{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2} = 0,$$

ποιός είναι ο συντελεστής του xy στο πολυώνυμο αυτό;

β.) Θεωρήστε την καμπύλη γ στον xyz- χώρο που είναι η τομή του κυλίνδρου $x^2+z^2 = 2$ και του ελλειπτικού κώνου $z = \sqrt{x^2+2y^2}$ και αποδείξτε ότι το μήκος της καμπύλης γ ισούται με

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\frac{\sin^2 t\cos^2 t}{1+\sin^2 t}}dt.$$

4.

α.) Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x^3-3xy^2, 3x^2y-y^3)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ του επιπέδου και εξετάστε κοντά σε ποιά σημεία αυτός αντιστρέφεται τοπικά. Τι σημαίνει αυτό, ότι δηλαδή αντιστρέφεται τοπικά; Πόσο ομαλοί είναι οι εν λόγω τοπικοί αντίστροφοι μετασχηματισμοί στην περίπτωση αυτή; Εν συνεχεία θεωρήστε ένα σημείο (α,β) με $\alpha^2+\beta^2 = 1$ και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{Area(T([\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon]\times[\beta-\epsilon,\beta+\epsilon]))}{\epsilon^2}$$

όπου $Area(\Omega)$ συμβολίζει το εμβαδόν της επιφάνειας Ω.

β.) Έστω $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Για ποιές τιμές των λ και μ συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\iiint_B \frac{x^2y^4z^6(x^4+2y^4+3z^4)^\lambda}{(x^6+4y^6+5z^6)^\mu}dxdydz = \lim_{\epsilon\to 0^+} \iiint\limits_{\epsilon^2\le x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{x^2y^4z^6(x^4+2y^4+3z^4)^\lambda}{(x^6+4y^6+5z^6)^\mu}dxdydz$$

Απαντήστε σε 3 θέματα.