Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιανουάριος 2020

Άλγεβρα Ι

1.
Δίνεται μία ομάδα $G = \{a_1, a_2, a_3\}$ τάξης 3. Δίνεται επίσης ότι $a_2 a_2 = a_2$ στην G. Θεωρούμε τον πίνακα της ομάδας (εννοείται με την ¨προφανή¨ σειρά των στοιχείων (a_1, a_2, a_3)). Υπολογίστε την πρώτη γραμμή του πίνακα.

2.
Θεωρούμε το γινόμενο κύκλων $x = (563)(12)(34)(7849)$ στην $G = S_9$. Παραγοντοποιούμε το x σε γινόμενο ξένων κύκλων. Έστω σ ο κύκλος της παραγοντοποίησης αυτής με $\sigma(9) \neq 9$. Έστω $a = \sigma(6)$. Υπολογίστε το $a \mod 8$.

3.
Δίνεται μια κυκλική ομάδα G τάξης 64 και ένας γεννήτορας a. Αν k η τάξη του a^{24}, υπολογίστε το $k \mod 8$.

4.
Αν $a = 57$, $t = 414$ και $k = a^t \mod 11$, υπολογίστε το $k \mod 8$.

5.
Δίνεταο ο ακέραιος $n = 60$ και η ομάδα $G = U_n$. Σε αυτό το πρόβλημα θα λέμε ότι ένα στοιχείο $a \in G$ είναι καλό όταν η εξίσωση $a^x = b$ έχει λύση για ακριβώς 16 τιμές του $b \in G$. Αν k είναι το πλήθος των καλών στοιχείων, να υπολογίσετε το $k \mod 7$.

6.
Δίνεται ένας ακέραιος $k \in \{0, 1, ..., 11\}$ που έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε ομάδα G τάξης 12 και κάθε $a \in G$, $(a^{29})^{-1} = a^k$ στην G. Υπολογίστε το $k \mod 8$.

7.
Δίνονται οι ομάδες $G_1 = \mathbb{Z}_{24}$, $G_2 = U_{40}$. Αν k είναι το πλήθος των ομομορφισμών από την G_1 στην G_2, να υπολογίσετε το $k \mod 7$.

8.
Δίνεται η ομάδα $G = \mathbb{Z}_8$, $x \in G$ και μία μη τετριμμένη υποομάδα H της G τέτοια ώστε το $\Sigma = \{x, 1\}$ να είναι σύμπλοκο της H στην G. Βρείτε το στοιχείο x.

9.
Έστω $a = 20$, $b = 30$, $d = \text{ΜΚΔ}(a, b)$ και $c = \phi(2d)$, όπου ϕ η συνάρτηση του Euler. Υπολογίστε το $c \mod 7$.

10.
Δίνονται οι ακέραιοι $n = 131$ και $a = 22$. Έστω $x \in \mathbb{Z}_n$ τέτοιο ώστε $ax = 5$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_n$. Υπολογίστε το $x \mod 4$.