

## Διακριτά Μαθηματικά

1.

Δείξτε ότι  $6|n^3 - n$  για κάθε  $n \geq 2$ .

2.

Σε ένα εργοστάσιο ο κατάλογος περιέχει 20 τύπους πιάτων. Πόσες δυνατές παραγγελίες 12 πιάτων υπάρχουν αν:

(α) Κάθε πιάτο είναι διαφορετικό.

(β) Όλα τα πιάτα είναι του ίδιου τύπου.

(γ) Δεν υπάρχουν περιορισμοί.

(δ) Υπάρχουν τουλάχιστον 4 πράσινες σαλάτες ή 4 χωριάτικες σαλάτες.

Σημείωση: Στην παραγγελία δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα πιάτα.

3.

Αποδείξτε με συνδυαστικό επιχείρημα την ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^n \binom{i-1}{k-1}.$$

Υπόδειξη: Πόσα υποσύνολα μεγέθους  $k$  του  $[n]$  υπάρχουν με  $i$  το μεγαλύτερο στοιχείο τους;

4.

Δίνεται ότι  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ . Βρείτε κλειστό τύπο για την ακολουθία  $a_k = 3a_{k-1} - 2a_{k-2}$  για  $k \geq 2$  με αρχικές συνθήκες  $a_0 = 2, a_1 = 6$ .

5.

Σχεδιάστε ή περιγράψτε ένα απλό γράφημα με τους παρακάτω βαθμούς κορυφών. Αν δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα, εξηγήστε το γιατί. Έπειτα εξηγήστε αν το γράφημα αυτό (όταν υπάρχει) έχει μονοπάτι ή κύκλο Euler.

(α) 0,1,2,3,4,5,6

(β)  $\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ φορές}}$

(γ)  $\underbrace{2, \dots, 2}_{n \text{ φορές}}$

(δ)  $\underbrace{n, \dots, n}_{2n \text{ φορές}}$

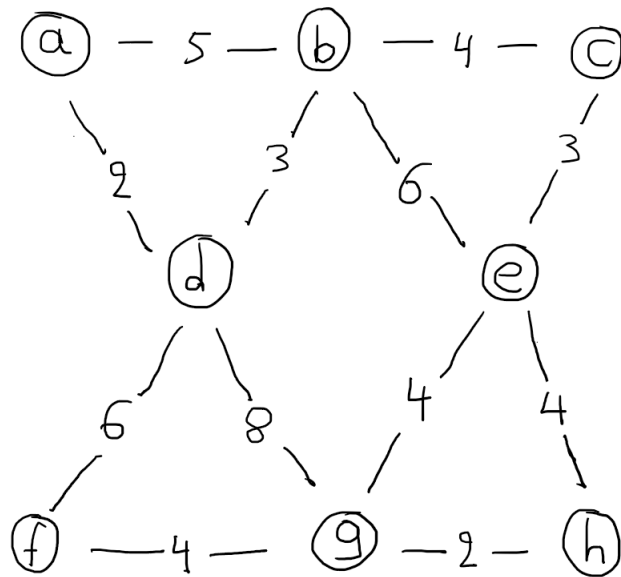
(ε) 4,4,3,3,2

6.

Έστω  $F = (V, E)$  δάσος με  $n$  κορυφές και  $m$  δέντρα. Βρείτε το  $|E|$ .

7.

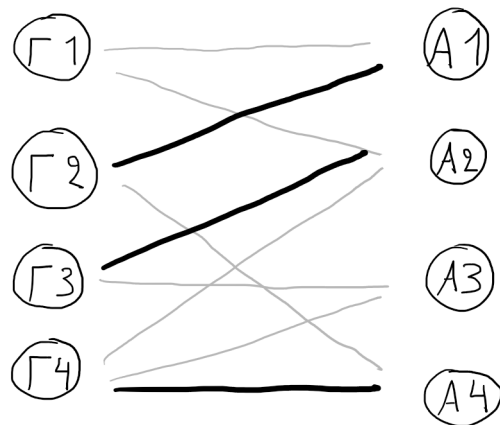
Βρείτε τουλάχιστον ένα δέντρο που παράγει το παρακάτω γράφημα με τον αλγόριθμο του Kruskal.



Σημειώστε με κάποιο τρόπο τα βήματα του αλγορίθμου.

8.

Οι πελάτες ενός γραφείου συννοικεσίων και οι προτιμήσεις τους αποτυπώνονται στο παρακάτω διμερές γράφημα



Ένας υπάλληλος αποφάσισε να κάνει τα ταιριάσματα  $\Gamma_2 - A_1$ ,  $\Gamma_3 - A_2$  και  $\Gamma_4 - A_4$ . Βρείτε ένα επαυξάνον μονοπάτι του ταιριάσματος αυτού και χρησιμοποιήστε το ώστε να κατασκευάσετε ένα πλήρες ταιρίασμα.